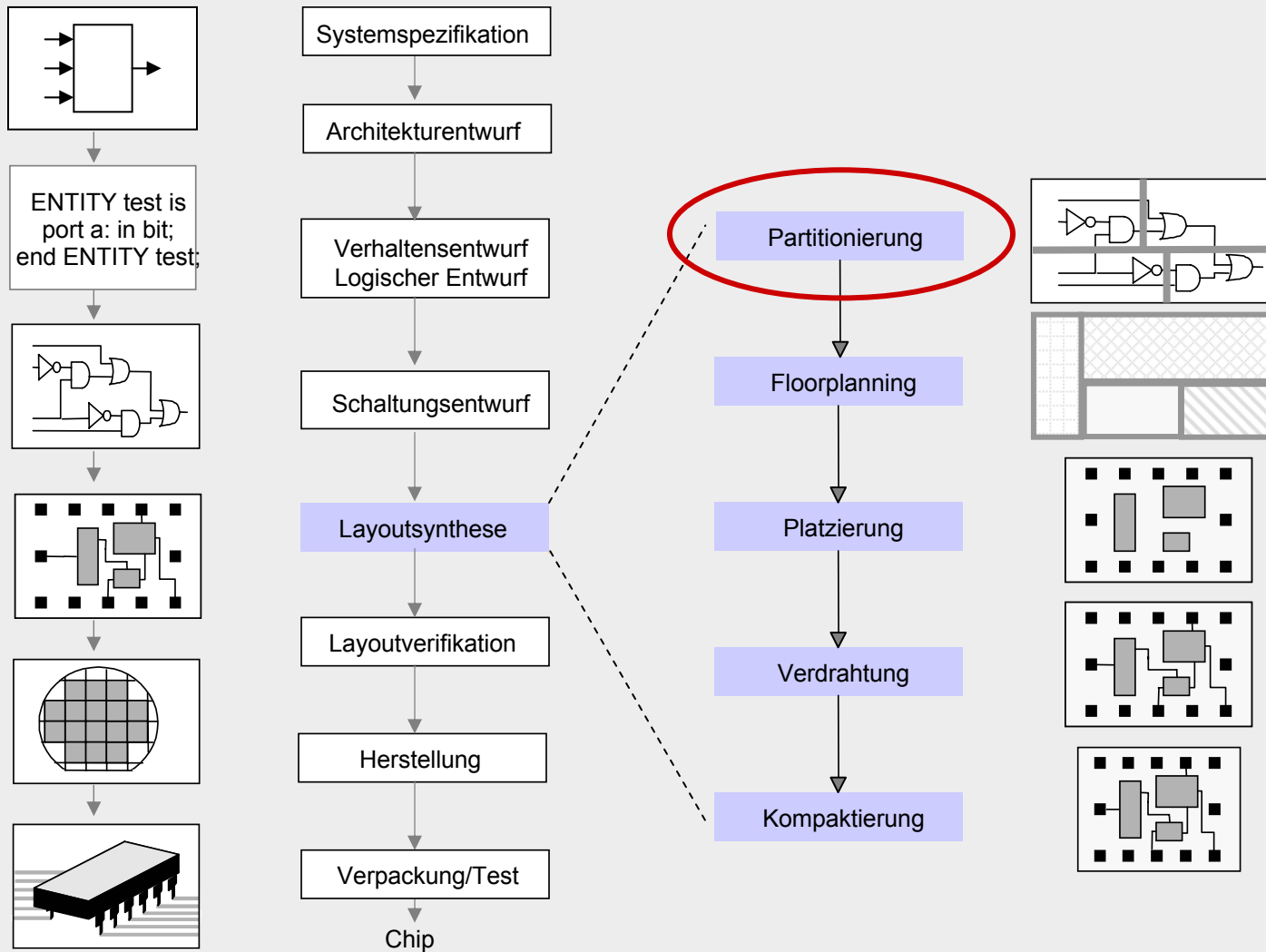


## Gliederung Kapitel 2 – Partitionierung

- 2.1 Einführung
- 2.2 Begriffsbestimmungen
- 2.3 Optimierungsziele
  - 2.3.1 Externe Verbindungen
  - 2.3.2 Bounded-Size-Partitionierung
- 2.4 Partitionierungsalgorithmen
  - 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus
  - 2.4.2 Erweiterungen des Kernighan-Lin-Algorithmus
  - 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus
  - 2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus

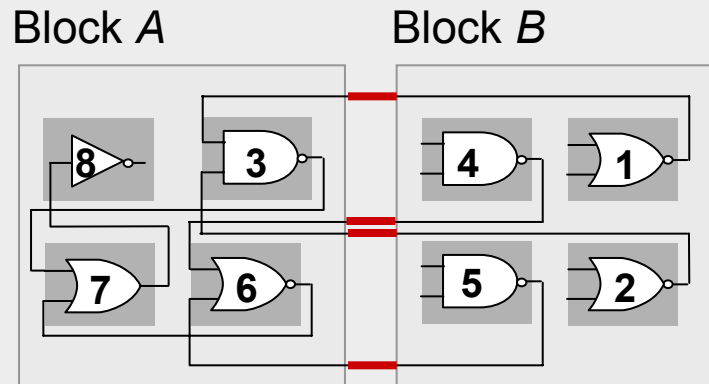
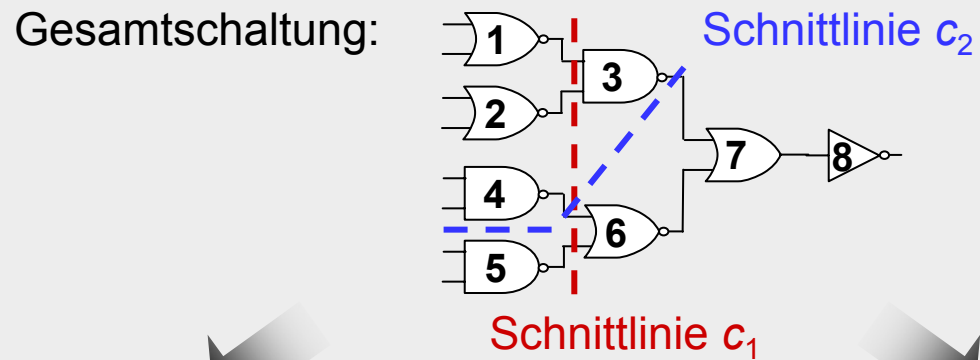
## 2.1 Einführung



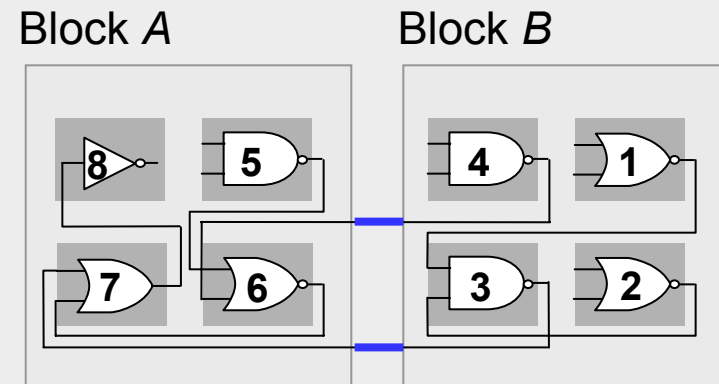
## 2.1 Einführung

Die Aufgabe der Partitionierung besteht darin, eine Schaltung in Teilschaltungen, sog. Partitionen oder Blöcke, aufzuteilen (zu partitionieren), wobei oft die Verknüpfungen der Blöcke untereinander zu minimieren sind.

## 2.1 Einführung

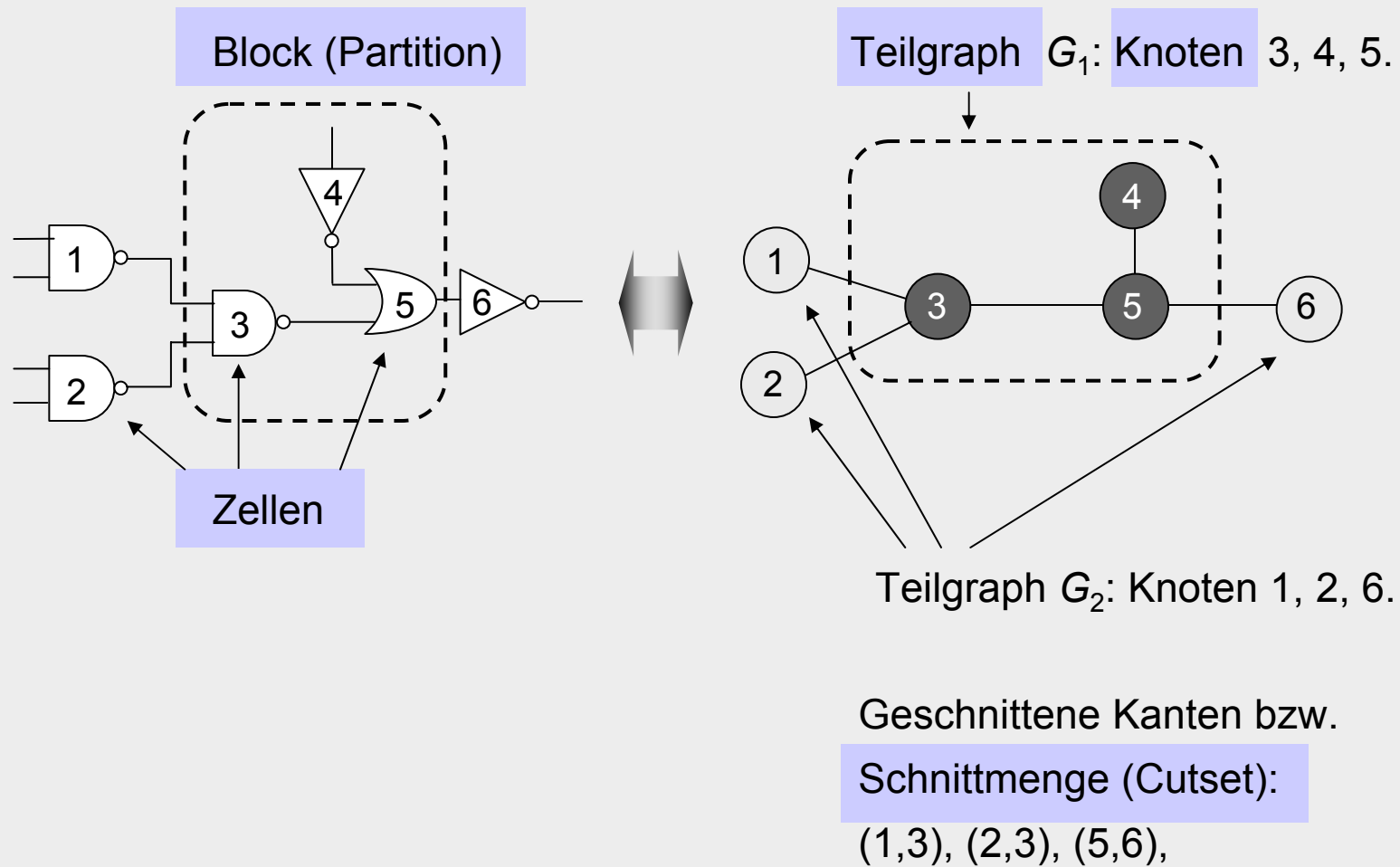


Schnittlinie  $c_1$ : vier externe Verbindungen



Schnittlinie  $c_2$ : zwei externe Verbindungen

## 2.2 Begriffsbestimmungen



## 2.3 Optimierungsziele

- Minimierung der Anzahl der externen Verbindungen
- Gleichmäßige bzw. vorgegebene Flächengröße der Blöcke (Bounded-Size-Partitionierung)

2.1 Einführung

2.2 Begriffsbestimmungen

2.3 Optimierungsziele

2.3.1 Externe Verbindungen

2.3.2 Bounded-Size-Partitionierung

**→ 2.4 Partitionierungsalgorithmen**

2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus

2.4.2 Erweiterungen des Kernighan-Lin-Algorithmus

2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus

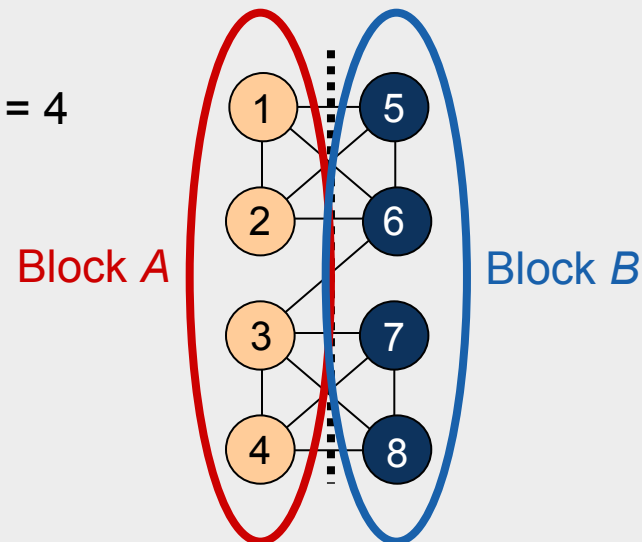
2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus

Gegeben ist ein Graph mit insgesamt  $2n$  Knoten und gewichteten Kanten zwischen beliebigen Knoten.

Gesucht ist die Aufteilung des Graphen in zwei Teilgraphen (Blöcke) mit jeweils  $n$  Knoten (Zellen) mit minimalen Schnittkosten (Summe der Gewichte aller geschnittenen Kanten).

Beispiel:  $n = 4$





## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Begriffe

Kosten  $D(v)$  eines Knotens  $v$

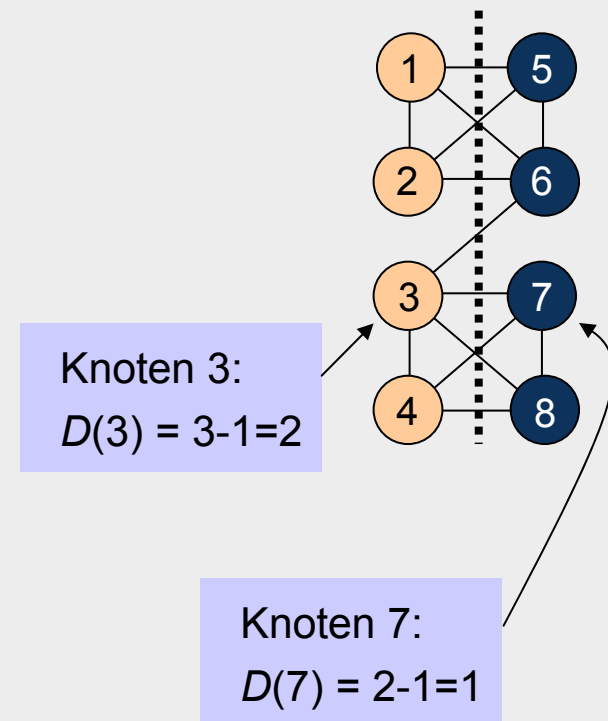
$$D(v) = \sum v_{\text{extern}} - \sum v_{\text{intern}} ,$$

wobei

$\sum v_{\text{extern}}$  die Anzahl der von der Schnittlinie geschnittenen Kanten des Knotens  $v$  und

$\sum v_{\text{intern}}$  die Anzahl der nicht von der Schnittlinie erfassten Kanten des Knotens sind.

Hohe Kosten (positiver  $D$ -Wert) geben damit einen bestimmten Drang an, die Teilmenge zu wechseln, während niedrige Kosten (negativer  $D$ -Wert) ein gewisses „Bleiberecht“ verkörpern.



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Begriffe

Gewinnwert zweier Knoten  $a$  und  $b$

$$\Delta g = D(a) + D(b) - 2 * c(a,b),$$

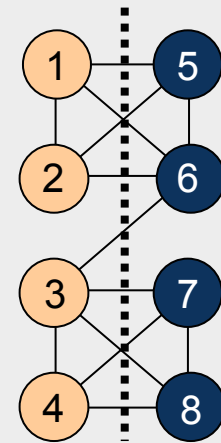
wobei

$D(a)$ ,  $D(b)$  die Kosten der Knoten  $a$ ,  $b$

$c(a,b) = 1$ , wenn zwischen  $a$  und  $b$  eine Kante existiert,  
andernfalls gilt  $c(a,b) = 0$ .

$\Delta g$  gibt damit an, wie sinnvoll es hinsichtlich der Schnittkosten des Graphen ist, die beiden betrachteten Knoten auszutauschen.

Je größer  $\Delta g$  ist, umso mehr wird die Gesamtanzahl der geschnittenen Kanten verringert.



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Begriffe

Gewinnwert zweier Knoten  $a$  und  $b$

$$\Delta g = D(a) + D(b) - 2 * c(a,b),$$

wobei

$D(a)$ ,  $D(b)$  die Kosten der Knoten  $a$ ,  $b$

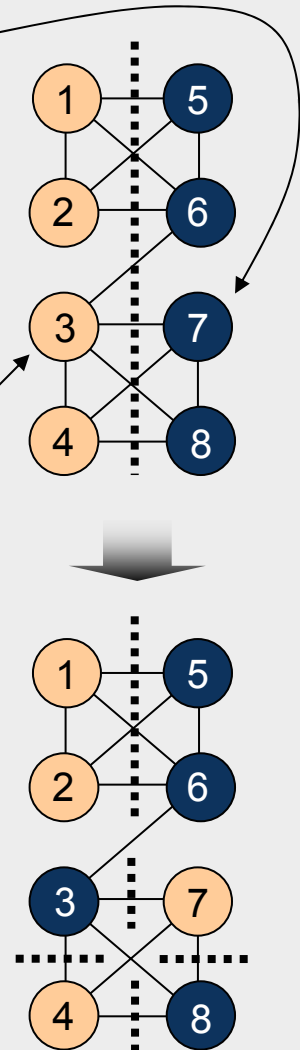
$c(a,b) = 1$ , wenn zwischen  $a$  und  $b$  eine Kante existiert,  
andernfalls gilt  $c(a,b) = 0$ .

$$\Delta g(3,7) = D(3) + D(7) - 2 * c(3,7) = 2 + 1 - 2 = 1$$

=> Der Austausch der Knoten 3 und 7 würde die Schnittkosten um 1 verringern.

Knoten 7:  
 $D(7) = 2-1=1$

Knoten 3:  
 $D(3) = 3-1=2$



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Begriffe

Gewinnwert zweier Knoten  $a$  und  $b$

$$\Delta g = D(a) + D(b) - 2 * c(a,b),$$

wobei

$D(a)$ ,  $D(b)$  die Kosten der Knoten  $a$ ,  $b$

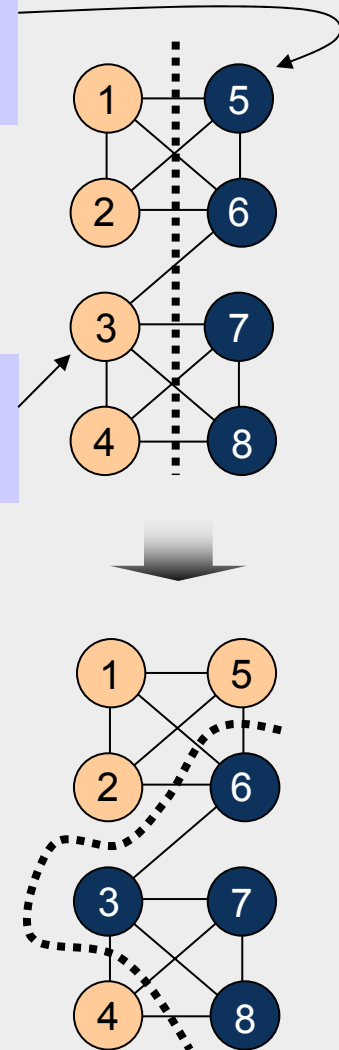
$c(a,b) = 1$ , wenn zwischen  $a$  und  $b$  eine Kante existiert,  
andernfalls gilt  $c(a,b) = 0$ .

$$\Delta g(3,5) = D(3) + D(5) - 2 * c(3,5) = 2 + 1 - 0 = 3$$

=> Der Austausch der Knoten 3 und 5 würde die Schnittkosten um 3 verringern.

Knoten 5:  
 $D(5) = 2-1=1$

Knoten 3:  
 $D(3) = 3-1=2$



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Begriffe

### Gewinnwert zweier Knoten $a$ und $b$

Das Ziel besteht darin, die zwei Knoten  $a$  und  $b$  zu finden, deren Gewinnwert  $\Delta g$  am größten von allen möglichen Knotenkombinationen ist, und diese dann auszutauschen.

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Begriffe

### Maximaler positiver Gewinn $G_m$ eines Passes

Der maximale positive Gewinn  $G_m$  gibt die Folge von  $m$  Vertauschungen innerhalb eines Passes an, die zu einer maximalen Schnittkostenminimierung des Graphen führt.

Konkret ergibt sich  $G_m$  aus den aufaddierten Gewinnwerten  $\Delta g$  von  $m$  hintereinander erfolgten Vertauschungen innerhalb eines Passes.

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus

### Schritt 0:

- $V$  = Menge der  $2n$  Knoten
- $\{A, B\}$  sei eine willkürliche Anfangspartitionierung

### Schritt 1:

- $i = 1$
- Berechnung von  $D(v)$  für alle Knoten  $v \in V$

### Schritt 2:

- Auswahl von  $a_i$  und  $b_i$  mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_i = D(a_i) + D(b_i) - 2 * c(a_i b_i)$
- Vertauschen und Fixieren von  $a_i$  und  $b_i$

### Schritt 3:

- Wenn alle Knoten fixiert sind, weiter mit Schritt 4, andernfalls
- Neuberechnung der  $D$ -Werte für alle Knoten, welche nicht fixiert und mit  $a_i$  und  $b_i$  verbunden sind
- $i = i + 1$
- Weiter mit Schritt 2

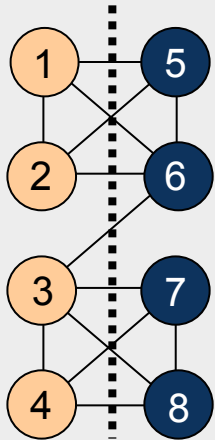
### Schritt 4:

- Bestimmung der Vertauschungssequenz 1 bis  $m$  ( $1 \leq m \leq i$ ), so dass  $G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i$  maximiert wird
- Wenn  $G_m > 0$ , weiter mit Schritt 5, andernfalls ENDE

### Schritt 5:

- Durchführen aller  $m$  Vertauschungen, Beseitigen aller Knotenfixierungen
- Weiter mit Schritt 1.

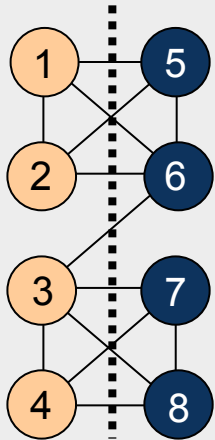
## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



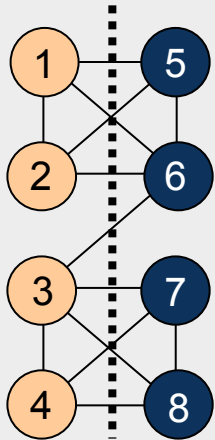
Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8

Kosten  $D(v)$  jedes Knotens:

$D(1) = 1$	$D(5) = 1$
$D(2) = 1$	$D(6) = 2$
$D(3) = 2$	$D(7) = 1$
$D(4) = 1$	$D(8) = 1$

Auswahl der Knoten für  
maximalen Gewinnwert

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



Schnittkosten: 9  
 Nicht fixiert:  
 1,2,3,4,5,6,7,8

Kosten  $D(v)$  jedes Knotens:

$D(1) = 1$      $D(5) = 1$   
 $D(2) = 1$      $D(6) = 2$   
 $D(3) = 2$      $D(7) = 1$   
 $D(4) = 1$      $D(8) = 1$

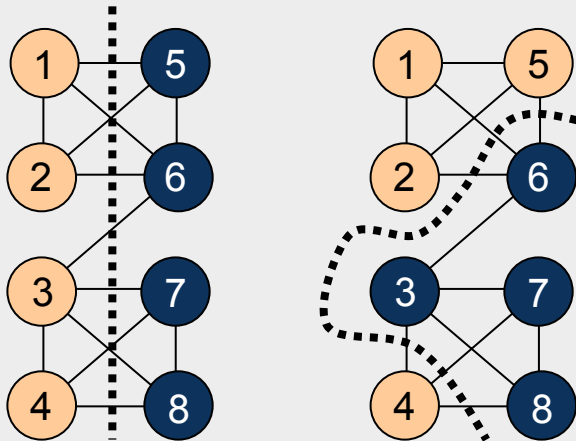
Auswahl der Knoten für  
 maximalen Gewinnwert

$\Delta g_1 = 2 + 1 - 0 = 3$  ← Gewinnwert bei Knotentausch

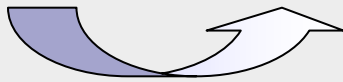
**Austausch (3,5)**

$G_1 = \Delta g_1 = 3$  ← Positiver Gewinn des Passes

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8



$D(1) = 1$      $D(5) = 1$   
 $D(2) = 1$      $D(6) = 2$   
 $D(3) = 2$      $D(7) = 1$   
 $D(4) = 1$      $D(8) = 1$

Auswahl der Knoten für  
maximalen Gewinnwert

$\Delta g_1 = 2 + 1 - 0 = 3$

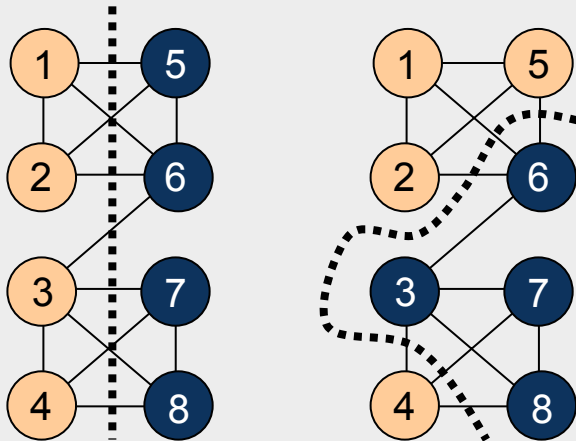
Gewinnwert bei Knotentausch

**Austausch (3,5)**

Positiver Gewinn des Passes

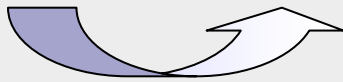
$G_1 = \Delta g_1 = 3$

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8

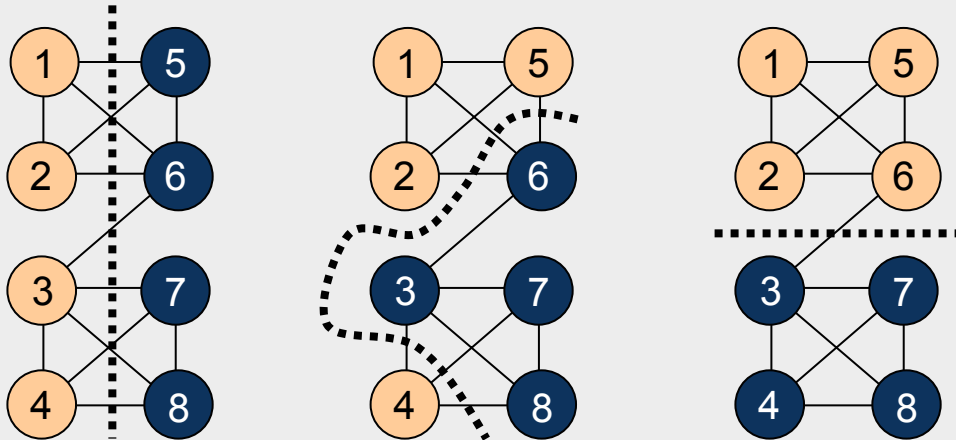
Schnittkosten: 6  
Nicht fixiert:  
1,2,4,6,7,8



$D(1) = 1$      $D(5) = 1$   
 $D(2) = 1$      $D(6) = 2$   
 $D(3) = 2$      $D(7) = 1$   
 $D(4) = 1$      $D(8) = 1$

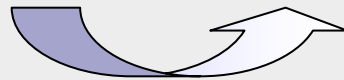
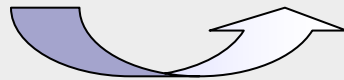
$\Delta g_1 = 2 + 1 - 0 = 3$   
**Austausch (3,5)**  
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8

Schnittkosten: 6  
Nicht fixiert:  
1,2,4,6,7,8



$D(1) = 1$      $D(5) = 1$   
 $D(2) = 1$      $D(6) = 2$   
 **$D(3) = 2$**      $D(7) = 1$   
 $D(4) = 1$      $D(8) = 1$

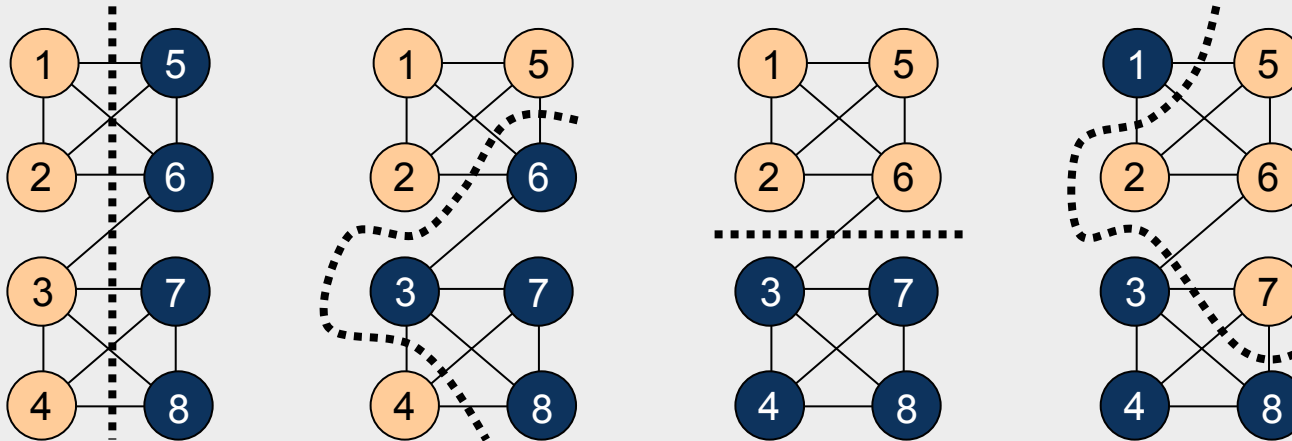
$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$   
**Austausch (3,5)**  
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

$D(1) = -1$      **$D(6) = 2$**   
 $D(2) = -1$      $D(7) = -1$   
 **$D(4) = 3$**      $D(8) = -1$

$\Delta g_2 = 3+2-0 = 5$  ← Gewinnwert bei Knotentausch  
**Austausch (4,6)**  
 $G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8$  ← Positiver Gewinn des Passes

Auswahl der Knoten für maximalen Gewinnwert

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel

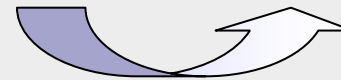
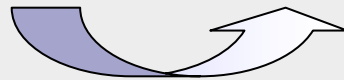
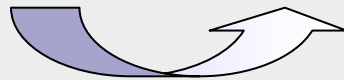


Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8

Schnittkosten: 6  
Nicht fixiert:  
1,2,4,6,7,8

Schnittkosten: 1  
Nicht fixiert:  
1,2,7,8

Schnittkosten: 7  
Nicht fixiert:  
2,8



$D(1) = 1$      $D(5) = 1$   
 $D(2) = 1$      $D(6) = 2$   
 $D(3) = 2$      $D(7) = 1$   
 $D(4) = 1$      $D(8) = 1$

$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$   
**Austausch (3,5)**  
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

$D(1) = -1$      $D(6) = 2$   
 $D(2) = -1$      $D(7) = -1$   
 $D(4) = 3$      $D(8) = -1$

$\Delta g_2 = 3+2-0 = 5$   
**Austausch (4,6)**  
 $G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8$

$D(1) = -3$      $D(7) = -3$   
 $D(2) = -3$      $D(8) = -3$

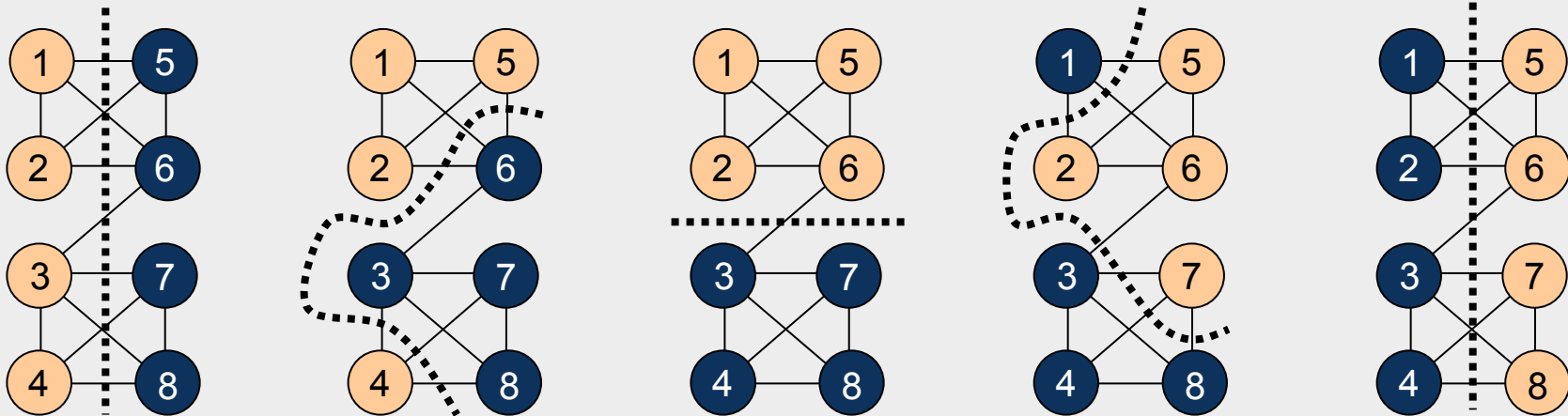
$\Delta g_3 = -3-3-0 = -6$   
**Austausch (1,7)**  
 $G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2$

Auswahl der Knoten für maximalen Gewinnwert

Gewinnwert bei Knotentausch

Positiver Gewinn des Passes

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel



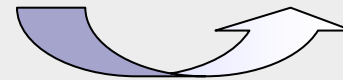
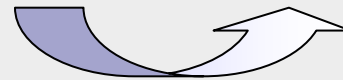
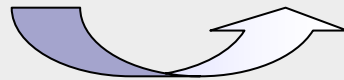
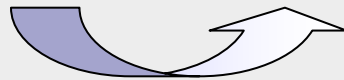
Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
1,2,3,4,5,6,7,8

Schnittkosten: 6  
Nicht fixiert:  
1,2,4,6,7,8

Schnittkosten: 1  
Nicht fixiert:  
1,2,7,8

Schnittkosten: 7  
Nicht fixiert:  
2,8

Schnittkosten: 9  
Nicht fixiert:  
-



$D(1) = 1$      $D(5) = 1$   
 $D(2) = 1$      $D(6) = 2$   
 $D(3) = 2$      $D(7) = 1$   
 $D(4) = 1$      $D(8) = 1$

$\Delta g_1 = 2+1-0 = 3$   
**Austausch (3,5)**  
 $G_1 = \Delta g_1 = 3$

$D(1) = -1$      $D(6) = 2$   
 $D(2) = -1$      $D(7) = -1$   
 $D(4) = 3$      $D(8) = -1$

$\Delta g_2 = 3+2-0 = 5$   
**Austausch (4,6)**  
 $G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8$

$D(1) = -3$      $D(7) = -3$   
 $D(2) = -3$      $D(8) = -3$

$\Delta g_3 = -3-3-0 = -6$   
**Austausch (1,7)**  
 $G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2$

$D(2) = -1$      $D(8) = -1$

$\Delta g_4 = -1-1-0 = -2$   
**Austausch (2,8)**  
 $G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0$

## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel

$$\begin{array}{ll} D(1) = 1 & D(5) = 1 \\ D(2) = 1 & D(6) = 2 \\ D(3) = 2 & D(7) = 1 \\ D(4) = 1 & D(8) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_1 = 2+1-0 = 3 \\ \text{Austausch (3,5)} \\ G_1 = \Delta g_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -1 & D(6) = 2 \\ D(2) = -1 & D(7) = -1 \\ D(4) = 3 & D(8) = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_2 = 3+2-0 = 5 \\ \text{Austausch (4,6)} \\ G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -3 & D(7) = -3 \\ D(2) = -3 & D(8) = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_3 = -3-3-0 = -6 \\ \text{Austausch (1,7)} \\ G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2 \end{array}$$

$$D(2) = -1 \quad D(8) = -1$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_4 = -1-1-0 = -2 \\ \text{Austausch (2,8)} \\ G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0 \end{array}$$

Maximaler positiver Gewinn  $G_m = 8$  bei  $m = 2$ .



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel

$$\begin{array}{ll} D(1) = 1 & D(5) = 1 \\ D(2) = 1 & D(6) = 2 \\ D(3) = 2 & D(7) = 1 \\ D(4) = 1 & D(8) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_1 = 2+1-0 = 3 \\ \text{Austausch (3,5)} \\ G_1 = \Delta g_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -1 & D(6) = 2 \\ D(2) = -1 & D(7) = -1 \\ D(4) = 3 & D(8) = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_2 = 3+2-0 = 5 \\ \text{Austausch (4,6)} \\ G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -3 & D(7) = -3 \\ D(2) = -3 & D(8) = -3 \end{array}$$

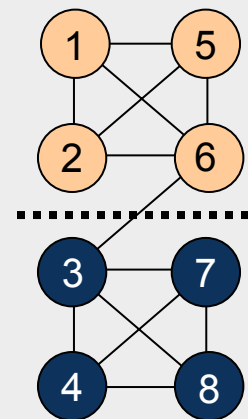
$$\begin{array}{l} \Delta g_3 = -3-3-0 = -6 \\ \text{Austausch (1,7)} \\ G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2 \end{array}$$

$$D(2) = -1 \quad D(8) = -1$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_4 = -1-1-0 = -2 \\ \text{Austausch (2,8)} \\ G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0 \end{array}$$

Maximaler positiver Gewinn  $G_m = 8$  bei  $m = 2$ .

Da  $G_m > 0$ , werden die  $m$  Vertauschungen (3,5) und (4,6) durchgeführt.



## 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus: Beispiel

$$\begin{array}{ll} D(1) = 1 & D(5) = 1 \\ D(2) = 1 & D(6) = 2 \\ D(3) = 2 & D(7) = 1 \\ D(4) = 1 & D(8) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_1 = 2+1-0 = 3 \\ \text{Austausch (3,5)} \\ G_1 = \Delta g_1 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -1 & D(6) = 2 \\ D(2) = -1 & D(7) = -1 \\ D(4) = 3 & D(8) = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_2 = 3+2-0 = 5 \\ \text{Austausch (4,6)} \\ G_2 = G_1 + \Delta g_2 = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D(1) = -3 & D(7) = -3 \\ D(2) = -3 & D(8) = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_3 = -3-3-0 = -6 \\ \text{Austausch (1,7)} \\ G_3 = G_2 + \Delta g_3 = 2 \end{array}$$

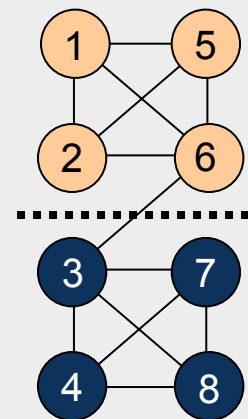
$$D(2) = -1 \quad D(8) = -1$$

$$\begin{array}{l} \Delta g_4 = -1-1-0 = -2 \\ \text{Austausch (2,8)} \\ G_4 = G_3 + \Delta g_4 = 0 \end{array}$$

Maximaler positiver Gewinn  $G_m = 8$  bei  $m = 2$ .

Da  $G_m > 0$ , werden die  $m$  Vertauschungen (3,5) und (4,6) durchgeführt.

Da  $G_m > 0$ , weiterer Pass notwendig, bis  $G_m \leq 0$  während aller Vertauschungen.



### 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus

Gegeben ist ein Graph mit Knoten (Zellen) und gewichteten Kanten zwischen beliebigen Knoten.

Gesucht ist die Aufteilung des Graphen in zwei Teilgraphen (Blöcke)  $A$  und  $B$  derart, dass die Anzahl der Netze zwischen beiden Teilgraphen minimiert und gleichzeitig ein vorgegebenes Größenverhältnis der durch die Teilgraphen repräsentierten Blöcke eingehalten wird.

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Begriffe

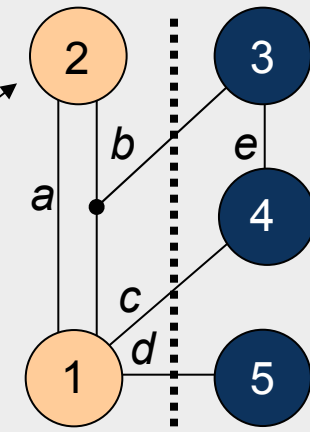
### Gewinnwert einer Zelle $\Delta g(c)$

$$\Delta g(c) = FS(c) - TE(c) ,$$

wobei

$FS(c)$  die Anzahl der mit der Zelle  $c$  verbundenen Netze darstellt, die nicht mit anderen Zellen im gegenwärtigen Block der Zelle  $c$  verbunden sind (durch die Schnittlinie kommend nur die Zelle  $c$  verbinden) und

$TE(c)$  die Anzahl der mit der Zelle  $c$  verbundenen Netze ist, die nicht die Schnittlinie kreuzen



Zelle 2:  $FS(2) = 0$   $TE(2) = 1$   $\Delta g(2) = -1$

Je höher der Gewinnwert  $\Delta g(c)$  einer Zelle  $c$  ist, umso sinnvoller ist es hinsichtlich einer Minimierung der Schnittmenge, diese Zelle in den anderen Block zu verschieben.

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Begriffe

### Gewinnwert einer Zelle $\Delta g(c)$

$$\Delta g(c) = FS(c) - TE(c) ,$$

wobei

$FS(c)$  die Anzahl der mit der Zelle  $c$  verbundenen Netze darstellt, die nicht mit anderen Zellen im gegenwärtigen Block der Zelle  $c$  verbunden sind (durch die Schnittlinie kommend nur die Zelle  $c$  verbinden) und

$TE(c)$  die Anzahl der mit der Zelle  $c$  verbundenen Netze ist, die nicht die Schnittlinie kreuzen

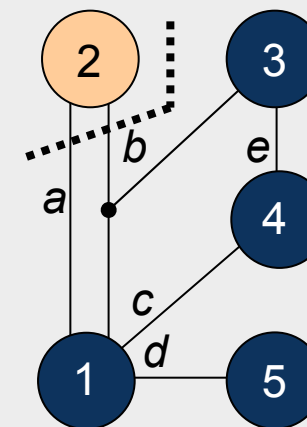
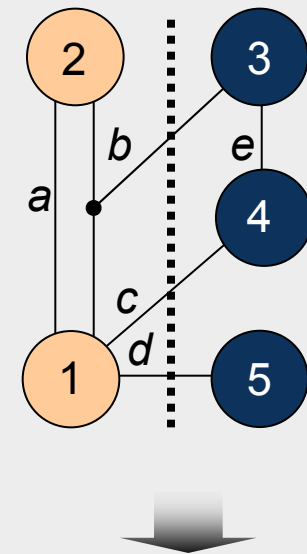
Zelle 1:  $FS(2) = 2$   $TE(2) = 1$   $\Delta g(2) = 1$

Zelle 2:  $FS(2) = 0$   $TE(2) = 1$   $\Delta g(2) = -1$

Zelle 3:  $FS(3) = 1$   $TE(3) = 1$   $\Delta g(3) = 0$

Zelle 4:  $FS(4) = 1$   $TE(4) = 1$   $\Delta g(4) = 0$

Zelle 5:  $FS(5) = 1$   $TE(5) = 0$   $\Delta g(5) = 1$



## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Begriffe

### Maximaler positiver Gewinn $G_m$ eines Passes

Der maximale positive Gewinn  $G_m$  gibt die Folge von  $m$  Verschiebungen innerhalb eines Passes an, die zu einer maximalen Schnittkostenminimierung führt.

Konkret ergibt sich  $G_m$  aus den aufaddierten Gewinnwerten  $\Delta g$  von  $m$  hintereinander erfolgten Verschiebungen innerhalb eines Passes.

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Begriffe

### Verhältnissfaktor und Gleichgewichtskriterium

Da beim FM-Algorithmus die Zellen einzeln verschoben werden, ist eine Berücksichtigung der Partitionierungsgrößen bei jeder Zellenverschiebung notwendig.

Mittels eines sog. Verhältnissfaktors  $r$  wird ein angestrebtes Größenverhältnis der Flächen  $A$  und  $B$  ausgedrückt:

$$r = \frac{|A|}{|A| + |B|}$$

Mit einem vom Verhältnissfaktor  $r$  ableitbaren Gleichgewichtskriterium lässt sich jede Zellenverschiebung auf Einhaltung des durch  $r$  vorgegebenen Größenverhältnisses beider Teilflächen verifizieren.

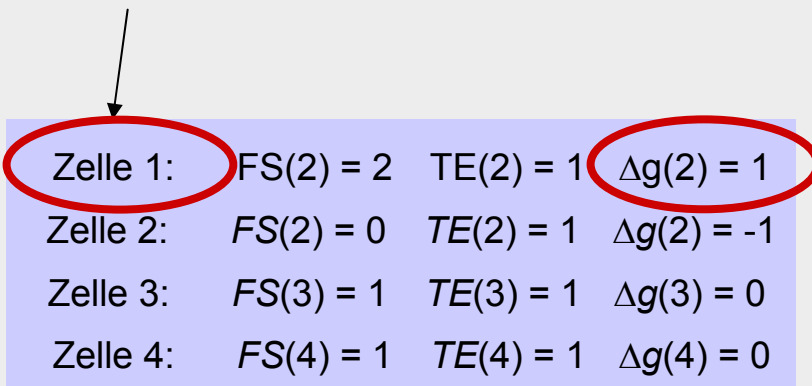
## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Begriffe

### Basiszelle

Die zur Verschiebung ausgewählte Zelle wird als Basiszelle bezeichnet.

Diese besitzt den maximalen Zellengewinnwert  $\Delta g(c)$  unter allen verschiebbaren Zellen und verletzt durch ihre Verschiebung nicht das Gleichgewichtskriterium.

Basiszelle



Zelle 1:	$FS(2) = 2$	$TE(2) = 1$	$\Delta g(2) = 1$
Zelle 2:	$FS(2) = 0$	$TE(2) = 1$	$\Delta g(2) = -1$
Zelle 3:	$FS(3) = 1$	$TE(3) = 1$	$\Delta g(3) = 0$
Zelle 4:	$FS(4) = 1$	$TE(4) = 1$	$\Delta g(4) = 0$



## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus

**Schritt 0:** Errechnen des Gleichgewichtskriteriums

**Schritt 1:** Ermitteln des Gewinns  $\Delta g_1$  jeder Zelle

**Schritt 2:**  $i = 1$

- Auswahl der Basiszelle  $c_1$  mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_1$ , Verschiebung dieser Zelle

**Schritt 3:**

- Fixierung der Basiszelle  $c_i$
- Gewinnwert-Aktualisierung der Zellen, die durch kritische Netze mit der Basiszelle  $c_i$  verbunden sind

**Schritt 4:**

- Wenn alle Zellen fixiert sind, weiter mit Schritt 5, andernfalls
- Auswahl der nächsten Basiszelle  $c_i$  mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_i$  und Verschiebung dieser Zelle
- $i = i + 1$ , weiter mit Schritt 3

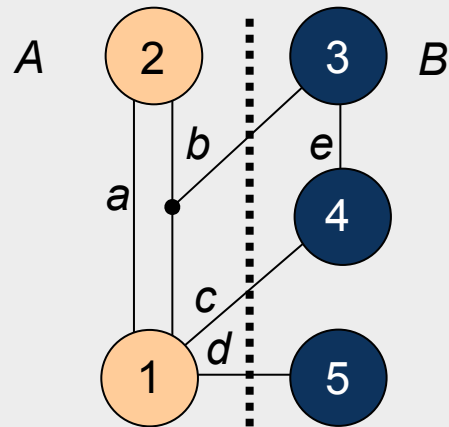
**Schritt 5:**

- Ermitteln der besten Verschiebungsfolge  $c_1, c_2, \dots, c_m$  ( $1 \leq m \leq i$ ), so dass  $G_m = \sum_{i=1}^m \Delta g_i$  maximiert wird
- Wenn  $G_m > 0$ , weiter mit Schritt 6, andernfalls ENDE

**Schritt 6:**

- Durchführen aller  $m$  Vertauschungen, beseitigen aller Zellenfixierungen
- Neuer Pass, dazu weiter mit Schritt 1.

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel



Gegeben:

Verhältnissfaktor  $r = 0,375$

$s(\text{Zelle}_1) = 2$

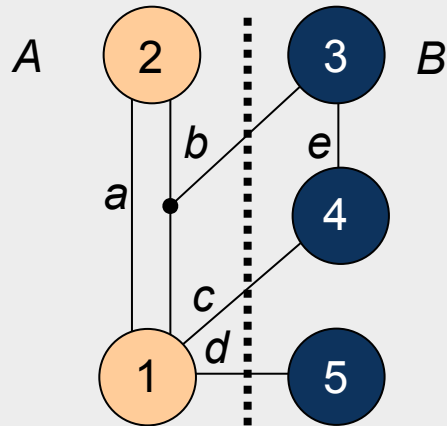
$s(\text{Zelle}_2) = 4$

$s(\text{Zelle}_3) = 1$

$s(\text{Zelle}_4) = 4$

$s(\text{Zelle}_5) = 5$ .

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel



Gegeben:

Verhältnissfaktor  $r = 0,375$

$s(\text{Zelle}_1) = 2$

$s(\text{Zelle}_2) = 4$

$s(\text{Zelle}_3) = 1$

$s(\text{Zelle}_4) = 4$

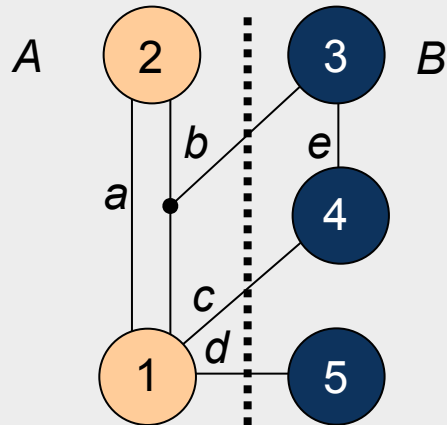
$s(\text{Zelle}_5) = 5$ .

**Schritt 0:** Errechnen des Gleichgewichtskriteriums

$$r \cdot |V| - s_{\max} \leq |A| \leq r \cdot |V| + s_{\max}$$

$$0,375 \cdot 16 - 5 = 1 \leq A \leq 11 = 0,375 \cdot 16 + 5.$$

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

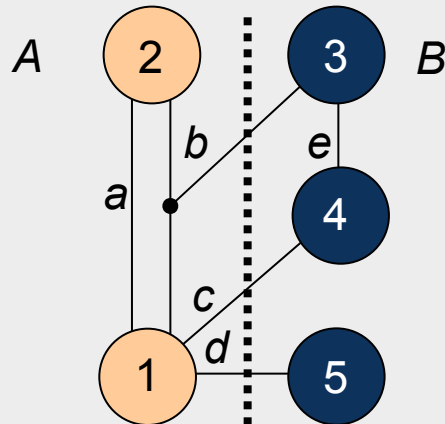


**Schritt 1:** Ermitteln der Gewinnwerte jeder Zelle

Zelle 1:

- Zwei Netze ( $c$ ,  $d$ ) sind nur mit Zelle 1 in deren Block verbunden und sind geschnitten, d.h.  $FS(\text{Zelle}_1) = 2$
- Ein Netz ( $a$ ) ist mit Zelle 1 verbunden und wird nicht geschnitten, d.h.  $TE(\text{Zelle}_1) = 1$
- $\Delta g(\text{Zelle}_1) = 2 - 1 = 1$ , d.h. Anzahl der geschnittenen Netze reduziert sich um eins (von drei auf zwei), sollte Zelle 1 von  $A$  nach  $B$  verschoben werden

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel



**Schritt 1:** Ermitteln der Gewinnwerte jeder Zelle

Zelle 1:

- Zwei Netze ( $c$ ,  $d$ ) sind nur mit Zelle 1 in deren Block verbunden und sind geschnitten, d.h.  $FS(\text{Zelle}_1) = 2$
- Ein Netz ( $a$ ) ist mit Zelle 1 verbunden und wird nicht geschnitten, d.h.  $TE(\text{Zelle}_1) = 1$
- $\Delta g(\text{Zelle}_1) = 2 - 1 = 1$ , d.h. Anzahl der geschnittenen Netze reduziert sich um eins (von drei auf zwei), sollte Zelle 1 von A nach B verschoben werden
- Analog werden die Gewinnwerte der verbleibenden Zellen berechnet:

$$\text{Zelle 2: } FS(\text{Zelle}_2) = 0 \quad TE(\text{Zelle}_2) = 1 \quad \Delta g(\text{Zelle}_2) = -1$$

$$\text{Zelle 3: } FS(\text{Zelle}_3) = 1 \quad TE(\text{Zelle}_3) = 1 \quad \Delta g(\text{Zelle}_3) = 0$$

$$\text{Zelle 4: } FS(\text{Zelle}_4) = 1 \quad TE(\text{Zelle}_4) = 1 \quad \Delta g(\text{Zelle}_4) = 0$$

$$\text{Zelle 5: } FS(\text{Zelle}_5) = 1 \quad TE(\text{Zelle}_5) = 0 \quad \Delta g(\text{Zelle}_5) = 1 .$$

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

Gewinnwerte der Zellen:

Zelle 1:  $FS(\text{Zelle}_1) = 2$   $TE(\text{Zelle}_1) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_1) = 1$   
Zelle 2:  $FS(\text{Zelle}_2) = 0$   $TE(\text{Zelle}_2) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_2) = -1$   
Zelle 3:  $FS(\text{Zelle}_3) = 1$   $TE(\text{Zelle}_3) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_3) = 0$   
Zelle 4:  $FS(\text{Zelle}_4) = 1$   $TE(\text{Zelle}_4) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_4) = 0$   
Zelle 5:  $FS(\text{Zelle}_5) = 1$   $TE(\text{Zelle}_5) = 0$   $\Delta g(\text{Zelle}_5) = 1$  .

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

Gewinnwerte der Zellen:

Zelle 1:  $FS(\text{Zelle}_1) = 2$   $TE(\text{Zelle}_1) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_1) = 1$

Zelle 2:  $FS(\text{Zelle}_2) = 0$   $TE(\text{Zelle}_2) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_2) = -1$

Zelle 3:  $FS(\text{Zelle}_3) = 1$   $TE(\text{Zelle}_3) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_3) = 0$

Zelle 4:  $FS(\text{Zelle}_4) = 1$   $TE(\text{Zelle}_4) = 1$   $\Delta g(\text{Zelle}_4) = 0$

Zelle 5:  $FS(\text{Zelle}_5) = 1$   $TE(\text{Zelle}_5) = 0$   $\Delta g(\text{Zelle}_5) = 1$  .

**Schritt 2:** Auswahl der Basiszelle und Verschiebung

Mögliche Basiszellen: Zelle 1 und Zelle 5

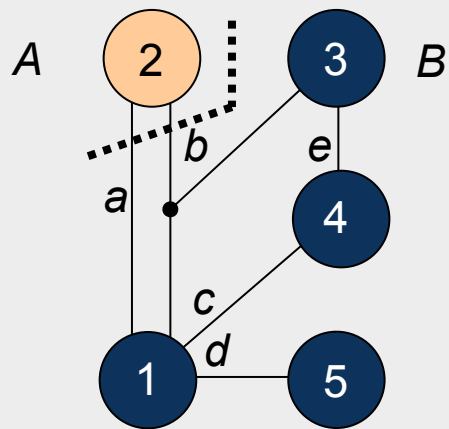
- Gleichgewichtskriterium nach Verschiebung von Zelle 1:  $|A| = s(2) = 4$
- Gleichgewichtskriterium nach Verschiebung von Zelle 5:  $|A| = s(1) + s(2) + s(5) = 11$  .

Beide Verschiebungen verletzen somit nicht das Gleichgewichtskriterium  $1 \leq |A| \leq 11$ ;  
Zelle 1 wird aufgrund der besseren Erfüllung als Basiszelle ausgewählt und verschoben.

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 3:** Zellenfixierung und Gewinnwert-Aktualisierung

1. Zelle 1 fixieren, neue Anordnung:

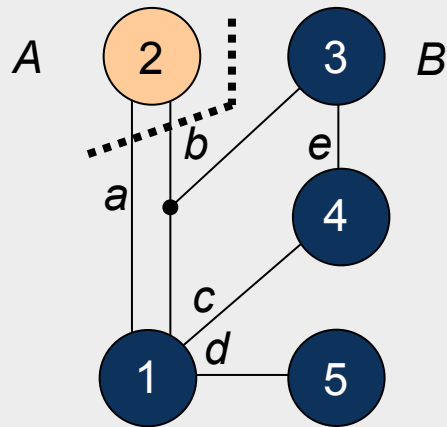




## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

### Schritt 3: Zellenfixierung und Gewinnwert-Aktualisierung

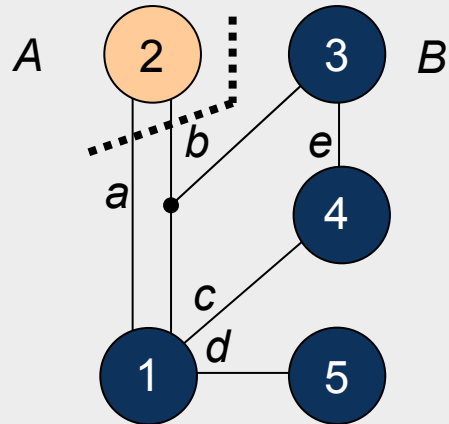
1. Zelle 1 fixieren, neue Anordnung:



2. Gewinnwert aktualisieren von allen verschiebbaren Zellen, die mittels kritischer Netze mit Zelle 1 verbunden sind:

Zelle 2:	$FS(\text{Zelle\_2}) = 2$	$TE(\text{Zelle\_2}) = 0$	$\Delta g(\text{Zelle\_2}) = 2$
Zelle 3:	$FS(\text{Zelle\_3}) = 0$	$TE(\text{Zelle\_3}) = 1$	$\Delta g(\text{Zelle\_3}) = -1$
Zelle 4:	$FS(\text{Zelle\_4}) = 0$	$TE(\text{Zelle\_4}) = 2$	$\Delta g(\text{Zelle\_4}) = -2$
Zelle 5:	$FS(\text{Zelle\_5}) = 0$	$TE(\text{Zelle\_5}) = 1$	$\Delta g(\text{Zelle\_5}) = -1$

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel



Zelle 2:  $FS(\text{Zelle}_2) = 2$

$TE(\text{Zelle}_2) = 0$

$\Delta g(\text{Zelle}_2) = 2$

Zelle 3:  $FS(\text{Zelle}_3) = 0$

$TE(\text{Zelle}_3) = 1$

$\Delta g(\text{Zelle}_3) = -1$

Zelle 4:  $FS(\text{Zelle}_4) = 0$

$TE(\text{Zelle}_4) = 2$

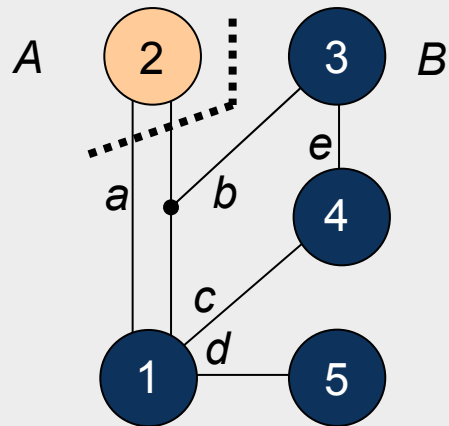
$\Delta g(\text{Zelle}_4) = -2$

Zelle 5:  $FS(\text{Zelle}_5) = 0$

$TE(\text{Zelle}_5) = 1$

$\Delta g(\text{Zelle}_5) = -1$

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel



Zelle 2:	$FS(\text{Zelle}_2) = 2$	$TE(\text{Zelle}_2) = 0$	$\Delta g(\text{Zelle}_2) = 2$
Zelle 3:	$FS(\text{Zelle}_3) = 0$	$TE(\text{Zelle}_3) = 1$	$\Delta g(\text{Zelle}_3) = -1$
Zelle 4:	$FS(\text{Zelle}_4) = 0$	$TE(\text{Zelle}_4) = 2$	$\Delta g(\text{Zelle}_4) = -2$
Zelle 5:	$FS(\text{Zelle}_5) = 0$	$TE(\text{Zelle}_5) = 1$	$\Delta g(\text{Zelle}_5) = -1$

### Schritt 4: Auswahl und Verschiebung einer Basiszelle; Zellenfixierung; Gewinnwert-Aktualisierung

– Iteration  $i = 2$

Gemäß obigem Schritt 3: Zelle 2 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_2 = 2$ ,  $|A| = 0$ , d.h. Gleichgewichtskriterium nicht erfüllt

Zelle 3 mit nächstem maximalen Gewinnwert  $\Delta g_2 = -1$ ,  $|A| = 5$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 5 mit nächstem maximalen Gewinnwert  $\Delta g_2 = -1$ ,  $|A| = 9$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 3 wird verschoben, Mengenverteilung  $A_2 = \{2,3\}$ ,  $B_2 = \{1,4,5\}$ , davon fixiert  $\{1,3\}$ .

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 4:** Auswahl und Verschiebung einer Basiszelle; Zellenfixierung; Gewinnwert-Aktualisierung

– Iteration  $i = 2$

Gemäß obigem Schritt 3: Zelle 2 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_2 = 2$ ,  $|A| = 0$ , d.h.

Gleichgewichtskriterium nicht erfüllt

Zelle 3 mit nächstem maximalen Gewinnwert  $\Delta g_2 = -1$ ,  $|A| = 5$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 5 mit nächstem maximalen Gewinnwert  $\Delta g_2 = -1$ ,  $|A| = 9$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 3 wird verschoben, Mengenverteilung  $A_2 = \{2,3\}$ ,  $B_2 = \{1,4,5\}$ , davon fixiert  $\{1,3\}$ .

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 4:** Auswahl und Verschiebung einer Basiszelle; Zellenfixierung; Gewinnwert-Aktualisierung

– Iteration  $i = 2$

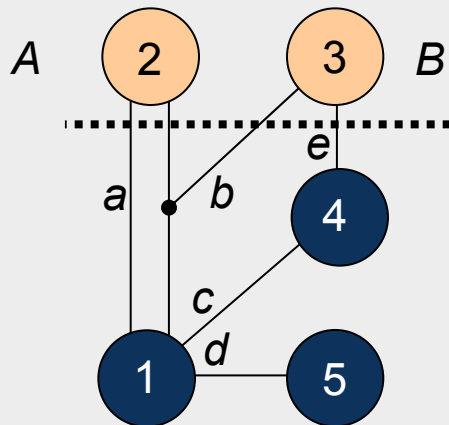
Gemäß obigem Schritt 3: Zelle 2 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_2 = 2$ ,  $|A| = 0$ , d.h.

Gleichgewichtskriterium nicht erfüllt

Zelle 3 mit nächstem maximalem Gewinnwert  $\Delta g_3 = -1$ ,  $|A| = 5$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 5 mit nächstem maximalem Gewinnwert  $\Delta g_5 = -1$ ,  $|A| = 9$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 3 wird verschoben, Mengenverteilung  $A_2 = \{2,3\}$ ,  $B_2 = \{1,4,5\}$ , davon fixiert  $\{1,3\}$ .



## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 4:** Auswahl und Verschiebung einer Basiszelle; Zellenfixierung; Gewinnwert-Aktualisierung

– Iteration  $i = 2$

Gemäß obigem Schritt 3: Zelle 2 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_2 = 2$ ,  $|A| = 0$ , d.h. Gleichgewichtskriterium nicht erfüllt

Zelle 3 mit nächstem maximalen Gewinnwert  $\Delta g_2 = -1$ ,  $|A| = 5$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 5 mit nächstem maximalen Gewinnwert  $\Delta g_2 = -1$ ,  $|A| = 9$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 3 wird verschoben, Mengenverteilung  $A_2 = \{2,3\}$ ,  $B_2 = \{1,4,5\}$ , davon fixiert  $\{1,3\}$ .

– Iteration  $i = 3$

$\Delta g_3(\text{Zelle}_2) = 1$   $\Delta g_3(\text{Zelle}_4) = 0$   $\Delta g_3(\text{Zelle}_5) = -1$

Zelle 2 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_3 = 1$ ,  $|A| = 1$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Zelle 2 wird verschoben, Mengenverteilung  $A_3 = \{3\}$ ,  $B_3 = \{1,2,4,5\}$ , davon fixiert  $\{1,2,3\}$ .

– Iteration  $i = 4$

$\Delta g_4(\text{Zelle}_4) = 0$   $\Delta g_4(\text{Zelle}_5) = -1$

Zelle 4 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_4 = 0$ ,  $|A| = 5$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Mengenverteilung  $A_4 = \{3,4\}$ ,  $B_4 = \{1,2,5\}$ , davon fixiert  $\{1,2,3,4\}$ .

– Iteration  $i = 5$

$\Delta g_5(\text{Zelle}_5) = -1$

Zelle 5 mit maximalem Gewinnwert  $\Delta g_5 = -1$ ,  $|A| = 10$ , d.h. Gleichgewichtskriterium erfüllt

Mengenverteilung  $A_5 = \{3,4,5\}$ ,  $B_5 = \{1,2\}$ , alle Zellen fixiert

Pass 1 beendet; weiter mit Schritt 5.

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 5:** Ermittlung der besten Verschiebungsfolge  $1 \dots m$

$$G_1 = \Delta g_1 = 1$$

$$G_2 = \Delta g_1 + \Delta g_2 = 0$$

$$G_3 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 = 1$$

$$G_4 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 = 1$$

$$G_5 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 + \Delta g_5 = 0.$$

## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 5:** Ermittlung der besten Verschiebungsfolge 1 ...  $m$

$$G_1 = \Delta g_1 = 1$$

$$G_2 = \Delta g_1 + \Delta g_2 = 0$$

$$G_3 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 = 1$$

$$G_4 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 = 1$$

$$G_5 = \Delta g_1 + \Delta g_2 + \Delta g_3 + \Delta g_4 + \Delta g_5 = 0.$$

- Maximaler positiver Gewinn

$$G_m = \sum_{i=1}^m g_i = 1$$

in Iterationen 1, 3 und 4.

- Aufgrund des ausgewogeneren Gleichgewichtskriteriums ( $|A| = 5$ ) wird Iteration 4 gewählt, d.h.  $m = 4$ .



## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

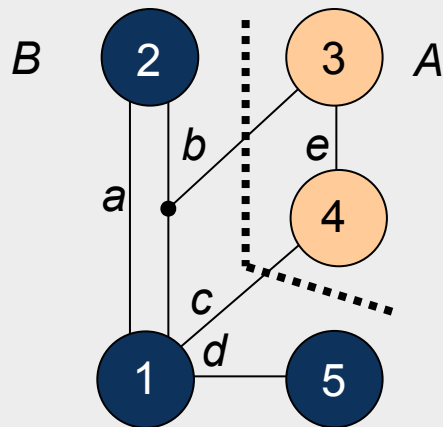
**Schritt 6:** Verschiebung der ersten  $m$  Zellen tatsächlich durchführen

- Da  $m = 4$ , werden nur die ersten vier ausgewählten Zellen (Zellen 1, 3, 2, 4) verschoben.

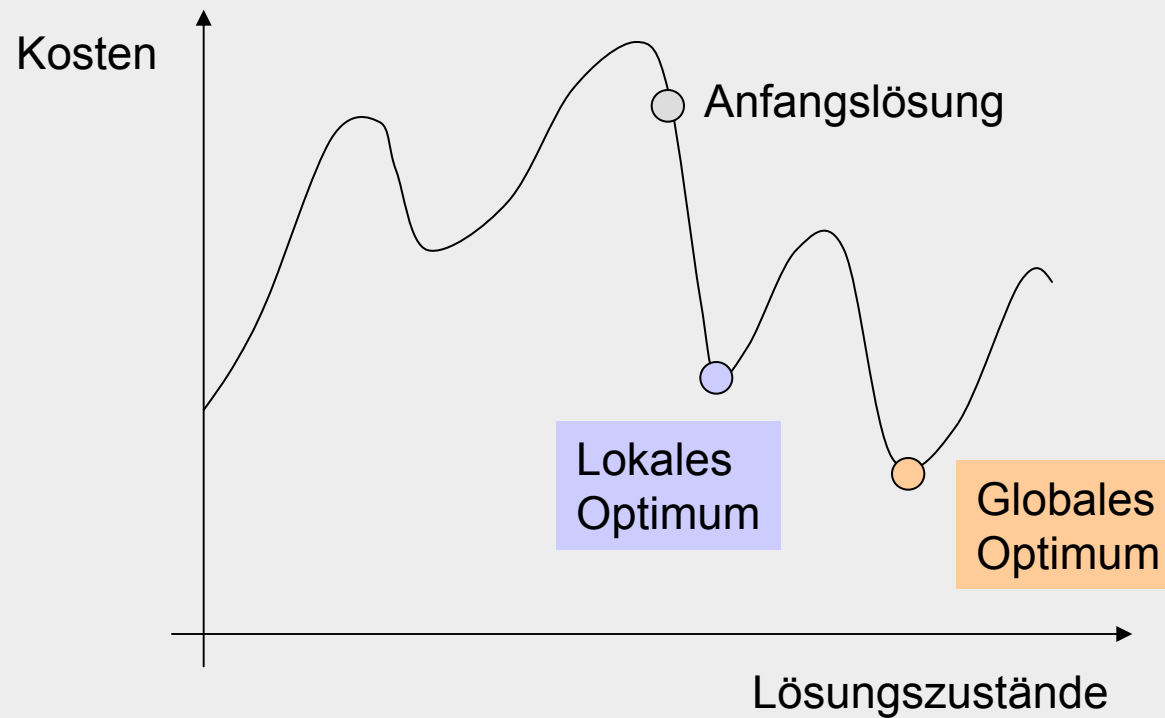
## 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus: Beispiel

**Schritt 6:** Verschiebung der ersten  $m$  Zellen tatsächlich durchführen

- Da  $m = 4$ , werden nur die ersten vier ausgewählten Zellen (Zellen 1, 3, 2, 4) verschoben.
- Ergebnis von Pass 1:  
Mengenverteilung  $A = \{3,4\}$ ,  $B = \{1,2,5\}$ , Schnittkosten von 3 auf 2 reduziert.



## 2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus



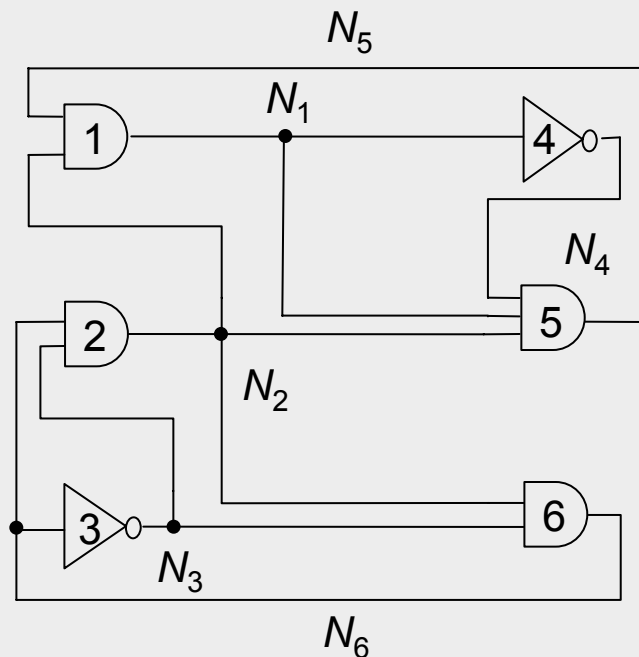
## 2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus

```
begin
   $T = T_0, i = 0$                                 /* Initialisierung */
   $cur\_part = init\_part$                           /* Anfangspartitionierung */
   $cur\_cost = COST(cur\_part)$                       /* Anfangsqualität */
  repeat
    repeat
       $i = i + 1$ 
       $a_i = SELECT(A), b_i = SELECT(B)$ 
       $trial\_part = EXCHANGE(a_i, b_i, cur\_part)$     /* Tauschversuch */
       $trial\_cost = COST(trial\_part)$ 
       $\Delta cost = trial\_cost - cur\_cost$ 
      if(  $\Delta cost < 0$  ) then                  /* wenn Verbesserung */
         $cur\_cost = trial\_cost$                     /* Tauschdurchführung */
         $cur\_part = MOVE(a_i, b_i)$ 
      else                                        /* ansonsten */
         $r = RANDOM(0,1)$                           /* Zufallszahl */
        if(  $r < e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$  ) then      /* bedingter */
           $cur\_cost = trial\_cost$                     /* Tausch */
           $cur\_part = MOVE(a_i, b_i)$ 
      until( Abbruchkriterium, z.B. Gleichgewicht bei  $T$ , erreicht )
       $T = \alpha * T$                                /*  $0 < \alpha < 1$  */          /* Temperatur-Reduktion */
    until(  $T < T_{min}$  )
end
```

## 2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus: Beispiel

Gegeben: Schaltung mit sechs Zellen und sechs Netzen, wobei alle Zellen identische Größe besitzen, sowie Netzliste mit Netzgewichten

Gesucht: Aufteilung in zwei Blöcke *A* und *B* mit jeweils drei Zellen und minimalen Kosten



Netze

$$N_1 = (1, 4, 5)$$

$$N_2 = (1, 2, 5, 6)$$

$$N_3 = (2, 3, 6)$$

$$N_4 = (4, 5)$$

$$N_5 = (1, 5)$$

$$N_6 = (2, 3, 6)$$

Gewichte

$$w_1 = 4$$

$$w_2 = 2$$

$$w_3 = 2$$

$$w_4 = 3$$

$$w_5 = 1$$

$$w_6 = 4$$

## 2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus: Beispiel

Parameter des SA-Algorithmus:

- Anfangstemperatur:  $T_0 = 10$ , Abbruch bei  $T < 3,5$
- Anfangspartitionierung: `init_part`  $A\{1,2, 3\}$ ,  $B\{4, 5, 6\}$
- Anzahl der Austauschversuche pro Temperaturschritt  $T$ : 4
- Temperaturabnahme:  $\alpha = 0,7$
- Austauschfunktion `EXCHANGE()`: Paarweiser Tausch der Zellen zwischen  $A$  und  $B$
- Minimierung der Zielfunktion `COST()`: Summe der Netzhewichte der geschnittenen Netze

Zähler <i>i</i>	<i>T</i>	<i>a<sub>i</sub>, b<sub>i</sub></i>	<i>cur_cost</i>	<i>trial_cost</i>	Zufallszahl <i>r</i>	$e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$	Tausch
1	10,00	3,4	13	16	0,21713	0,74082	Ja

Zähler <i>i</i>	<i>T</i>	<i>a<sub>i</sub>, b<sub>i</sub></i>	<i>cur_cost</i>	<i>trial_cost</i>	Zufallszahl <i>r</i>	$e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$	Tausch
1	10,00	3,4	13	16	0,21713	0,74082	Ja
2	10,00	2,3	16	16	0,66138	1	Ja
3	10,00	4,6	16	13			Ja
4	10,00	1,2	13	<b>2</b>			Ja
5	7,00	2,5	2	16	0,11209	0,13534	Ja
6	7,00	1,5	16	13			Ja
7	7,00	1,4	13	15	0,33190	0,75148	Ja
8	7,00	2,6	15	15	0,12564	1	Ja
9	4,90	1,3	15	16	0,70105	0,81540	Ja
10	4,90	3,4	16	13			Ja
11	4,90	1,6	13	2			Ja
12	4,90	5,6	2	16	0,49375	0,05743	Nein
13	3,43	1,3	2	13	0,86493	0,04048	Nein
14	3,43	2,5	2	16	0,34371	0,01688	Nein
15	3,43	1,6	2	13	0,73232	0,04048	Nein
16	3,43	1,2	2	13	0,02093	0,04048	Ja



Zähler <i>i</i>	<i>T</i>	$a_i, b_i$	<i>cur_cost</i>	<i>trial_cost</i>	Zufallszahl <i>r</i>	$e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$	Tausch
1	10,00	3,4	13	16	0,21713	0,74082	Ja
2	10,00	2,3	16	16	0,66138	1	Ja
3	10,00	4,6	16	13			Ja
4	10,00	1,2	13	<b>2</b>			Ja
5	7,00	2,5	2	16	0,11209	0,13534	Ja
6	7,00	1,5	16	13			Ja
7	7,00	1,4	13	15	0,33190	0,75148	Ja
8	7,00	2,6	15	15	0,12564	1	Ja
9	4,90	1,3	15	16	0,70105	0,81540	Ja
10	4,90	3,4	16	13			Ja
11	4,90	1,6	13	2			Ja
12	4,90	5,6	2	16	0,49375	0,05743	Nein
13	3,43	1,3	2	13	0,86493	0,04048	Nein
14	3,43	2,5	2	16	0,34371	0,01688	Nein
15	3,43	1,6	2	13	0,73232	0,04048	Nein
16	3,43	1,2	2	13	0,02093	0,04048	Ja

Veranschaulichung ausgewählter Iterationen *i*:

*i* = 4 (*T* = 10):

- Selektierte Zellen zum Tausch sind 1, 2; *cur\_cost* = 13, *trial\_cost* = 2, d.h. Tausch wird akzeptiert

Zähler <i>i</i>	<i>T</i>	<i>a<sub>i</sub>, b<sub>i</sub></i>	<i>cur_cost</i>	<i>trial_cost</i>	Zufallszahl <i>r</i>	$e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$	Tausch
1	10,00	3,4	13	16	0,21713	0,74082	Ja
2	10,00	2,3	16	16	0,66138	1	Ja
3	10,00	4,6	16	13			Ja
4	10,00	1,2	13	<b>2</b>			Ja
5	7,00	2,5	2	16	0,11209	0,13534	Ja
6	7,00	1,5	16	13			Ja
7	7,00	1,4	13	15	0,33190	0,75148	Ja
8	7,00	2,6	15	15	0,12564	1	Ja
9	4,90	1,3	15	16	0,70105	0,81540	Ja
10	4,90	3,4	16	13			Ja
11	4,90	1,6	13	2			Ja
12	4,90	5,6	2	16	0,49375	0,05743	Nein
13	3,43	1,3	2	13	0,86493	0,04048	Nein
14	3,43	2,5	2	16	0,34371	0,01688	Nein
15	3,43	1,6	2	13	0,73232	0,04048	Nein
16	3,43	1,2	2	13	0,02093	0,04048	Ja

Veranschaulichung ausgewählter Iterationen *i*:

*i* = 4 (*T* = 10):

- Selektierte Zellen zum Tausch sind 1, 2; *cur\_cost* = 13, *trial\_cost* = 2, d.h. Tausch wird akzeptiert

*i* = 5 (*T* = 7):

- Selektierte Zellen zum Tausch sind 2, 5; *cur\_cost* = 2, *trial\_cost* = 16, d.h. Zufallszahl wird generiert: 0,11209
- $0,11209 < e^{-14/7} = 0,13534$ , d.h. Tausch wird akzeptiert.

Zähler $i$	$T$	$a_i, b_i$	$cur\_cost$	$trial\_cost$	Zufallszahl $r$	$e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$	Tausch
1	10,00	3,4	13	16	0,21713	0,74082	Ja
2	10,00	2,3	16	16	0,66138	1	Ja
3	10,00	4,6	16	13			Ja
4	10,00	1,2	13	<b>2</b>			Ja
5	7,00	2,5	2	16	0,11209	0,13534	Ja
6	7,00	1,5	16	13			Ja
7	7,00	1,4	13	15	0,33190	0,75148	Ja
8	7,00	2,6	15	15	0,12564	1	Ja
9	4,90	1,3	15	16	0,70105	0,81540	Ja
10	4,90	3,4	16	13			Ja
11	4,90	1,6	13	2			Ja
12	4,90	5,6	2	16	0,49375	0,05743	Nein
13	3,43	1,3	2	13	0,86493	0,04048	Nein
14	3,43	2,5	2	16	0,34371	0,01688	Nein
15	3,43	1,6	2	13	0,73232	0,04048	Nein
16	3,43	1,2	2	13	0,02093	0,04048	Ja

Veranschaulichung ausgewählter Iterationen  $i$ :

$i = 4$  ( $T = 10$ ):

- Selektierte Zellen zum Tausch sind 1, 2;  $cur\_cost = 13$ ,  $trial\_cost = 2$ , d.h. Tausch wird akzeptiert

$i = 5$  ( $T = 7$ ):

- Selektierte Zellen zum Tausch sind 2, 5;  $cur\_cost = 2$ ,  $trial\_cost = 16$ , d.h. Zufallszahl wird generiert: 0,11209
- $0,11209 < e^{-14/7} = 0,13534$ , d.h. Tausch wird akzeptiert.

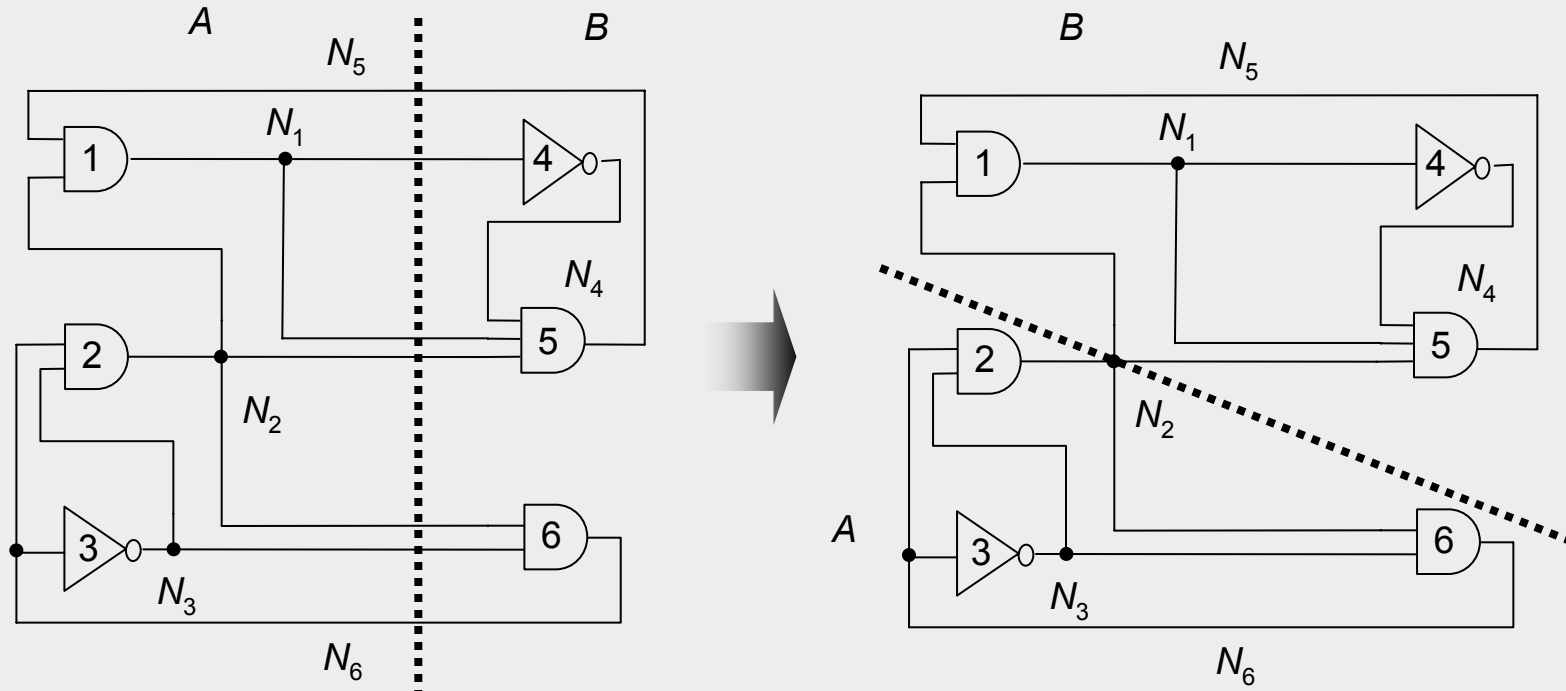
$i = 12-15$  ( $T = 4,9$  bzw.  $T = 3,43$ ):

- $trial\_cost$  jeweils größer als  $cur\_cost$  und Zufallszahl  $r$  jeweils größer als  $e^{-\Delta cost / T}$ , d.h. Vertauschungen nicht akzeptiert

Zähler $i$	$T$	$a_i, b_i$	$cur\_cost$	$trial\_cost$	Zufallszahl $r$	$e^{-\frac{\Delta cost}{T}}$	Tausch
1	10,00	3,4	13	16	0,21713	0,74082	Ja
2	10,00	2,3	16	16	0,66138	1	Ja
3	10,00	4,6	16	13			Ja
4	10,00	1,2	13	<b>2</b>			Ja
5	7,00	2,5	2	16	0,11209	0,13534	Ja
6	7,00	1,5	16	13			Ja
7	7,00	1,4	13	15	0,33190	0,75148	Ja
8	7,00	2,6	15	15	0,12564	1	Ja
9	4,90	1,3	15	16	0,70105	0,81540	Ja
10	4,90	3,4	16	13			Ja
11	4,90	1,6	13	2			Ja
12	4,90	5,6	2	16	0,49375	0,05743	Nein
13	3,43	1,3	2	13	0,86493	0,04048	Nein
14	3,43	2,5	2	16	0,34371	0,01688	Nein
15	3,43	1,6	2	13	0,73232	0,04048	Nein
16	3,43	1,2	2	13	0,02093	0,04048	Ja

- In der 4. Iteration ( $i = 4$ ) erreicht der SA-Algorithmus einen Kostenwert von 2, welcher den besten erzielbaren Wert darstellt.
- Dieser repräsentiert die Summe der Netzgewichte der geschnittenen Netze (hier Netz 2 mit  $w_2 = 2$ ).
- Wie dem detaillierten Ablauf zu entnehmen ist, wurde dieses Optimum durch die vorherige Akzeptanz von einer schlechteren Lösung in der 1. Iteration erreicht.

Die beste Lösung entspricht einer Partitionierung von  $A \{2,3,6\}$  und  $B \{1,4,5\}$



Anfangspartitionierung:  
 $A \{1,2,3\}$ ,  $B \{4,5,6\}$   
 Kosten: 13

Erzielte Lösung:  
 $A \{2,3,6\}$ ,  $B \{1,4,5\}$   
 Kosten: 2

# Zusammenfassung Kapitel 2 – Partitionierung

- 2.1 Einführung
- 2.2 Begriffsbestimmungen
- 2.3 Optimierungsziele
  - 2.3.1 Externe Verbindungen
  - 2.3.2 Bounded-Size-Partitionierung
- 2.4 Partitionierungsalgorithmen
  - 2.4.1 Kernighan-Lin (KL)-Algorithmus
  - 2.4.2 Erweiterungen des Kernighan-Lin-Algorithmus
  - 2.4.3 Fiduccia-Mattheyses (FM)-Algorithmus
  - 2.4.4 Simulated-Annealing (SA)-Algorithmus